

Zur Modellierung zufälliger Erscheinungen

HANS-DIETER SILL, ROSTOCK

Zusammenfassung: In dem Beitrag wird eine neue Begriffs- und Betrachtungsweise zur Modellierung zufälliger Erscheinungen vorgestellt und mit bisherigen Darstellungen in der Fach- und Schulbuchliteratur verglichen. Insbesondere erfolgt eine kritische Auseinandersetzung mit dem Begriff „Zufallsexperiment“. Das vorgeschlagene Strukturmodell stellt eine gemeinsame Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik dar und führt insbesondere zu einer vertieften Herangehensweise an die Auswertung statistischer Daten. Es werden Beispiele betrachtet, Vorschläge zur Umsetzung in der Schule unterbreitet, und es wird über Unterrichtserfahrungen berichtet.

1 Vorbemerkungen

Mit diesem Beitrag sollen die in Sill 1993 vorgestellten Betrachtungen zum Zufallsbegriff, insbesondere zur Veränderung der Terminologie und Betrachtungsweise zufälliger Erscheinungen, fortgeführt werden.

Um Beziehungen der Vorschläge zu den aktuellen Begrifflichkeiten herzustellen, sollen zunächst die Ergebnisse einer Literaturanalyse vorgestellt und diskutiert werden. Danach wird ein Vorschlag zur Definition mathematischer Modelle für zufällige Erscheinungen insbesondere für die Fachliteratur unterbreitet und anschließend werden Vorschläge zur Modellierung zufälliger Erscheinungen im Stochastikunterricht vorgestellt. Eine Hauptidee besteht darin, bei zufälligen Erscheinungen nicht vorrangig die eingetretenen Ereignisse, sondern den Prozess ihrer Entstehung zu betrachten.

2 Zum Begriff „Zufallsexperiment“ und analogen Bezeichnungen in der Fach- und Schulbuchliteratur

Zur Verwendung der Begriffe in der Fachliteratur

Um einen Überblick über die Verwendung der Begriffe in Lehrbüchern zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bekommen, habe ich 28 der 296 Bücher aus dem Bestand der Universitätsbibliothek Rostock ausgewählt, die auf die Suchanfrage „Einführung“ und „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ angezeigt wurden. Bei der Auswahl der Bücher achtete ich u. a. darauf, aktuelle Bücher mit vielen Auflagen, aber auch einige ältere Werke sowie zwei Stu-

dienbriefe des DIFF Tübingen von 1979 und 1981 zu berücksichtigen.

Zu den Autoren der ausgewählten Lehrbücher gehören K. Behnen/G. Neuhaus, E. Behrends, O. Beyrer, G. Bol, K. Bosch, G. Bourier, A. Büchter/H.-W. Henn, H. Eggs, A. Engel, M. Fisz, H.-O. Georgii, B. Gnedenko, N. Henze, K. Hinderer, A. Kolmogoroff, H. Kütting/M. Sauer, J. Lehn/H. Wegmann, G. Maibaum, W. Morgenstern, K. Nawrotzki, D. Plachky, A. Rényi, H. Richter, E. Warmuth, Ch. Weigand und D. Wickmann¹.

In seiner berühmten Monografie von 1933 zum axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet Kolmogoroff den Begriff „Zufallsexperiment“ bzw. analoge Bezeichnungen nicht. Auch in seinen Ausführungen im 2. Kapitel zum Verhältnis der axiomatischen Festlegungen zur Erfahrungswelt treten sie nicht auf. Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die reale Erfahrungswelt beschreibt er in folgender Weise (S. 3):

- Es wird ein gewisser Komplex von Bedingungen vorausgesetzt, welcher unbeschränkter Wiederholung fähig ist.
- Man untersucht dann einen bestimmten Kreis von Ereignissen, welche infolge der Realisation der Bedingungen entstehen können und die man a priori für möglich erachtet.

Dies bezeichnet er aber ausdrücklich als zusätzliche Überlegungen, die bei dem weiteren axiomatischen Aufbau der Theorie nicht benutzt werden.

Von den 28 gesichteten Fachbüchern werden in 7 der Begriff „Zufallsexperiment“ bzw. analoge Begriffsbildungen nicht verwendet. In den übrigen 21 Büchern findet man in 13 die Bezeichnung „Zufallsexperiment“, in 3 Büchern den Begriff „Zufallsversuch“ und in 10 Büchern weitere Bezeichnungen, darunter „Vorgang mit zufälligem Ergebnis“ (viermal) und „zufälliger Vorgang“ (zweimal). Es werden z. T. mehrere Bezeichnungen verwendet. Als Merkmale dieser Begriffe werden in den 21 Büchern angegeben²:

- Es gibt genau festgelegte Bedingungen, unter denen das Zufallsexperiment durchgeführt wird. (12)
- Das Zufallsexperiment ist unter diesen Bedingungen zumindest prinzipiell beliebig oft wiederholbar. (11)

- Das Zufallsexperiment hat vorher bekannte unterschiedliche Ausgänge (Ergebnisse), von denen genau einer eintritt. (13)
- Das Ergebnis des Zufallsexperimentes ist nicht vorhersehbar bzw. ungewiss. (13)

Darüber hinaus werden noch 13 weitere unterschiedliche Merkmale und Erklärungen zu den Bezeichnungen angegeben. In zwei Büchern wird der betreffende Begriff definiert und in weiteren in definitionsähnlicher Form beschrieben.

Als Beispiele für Zufallsexperimente werden von allen Autoren zunächst Vorgänge unter Verwendung von Zufallsgeräten³ genannt, darunter in jedem Fall das Werfen eines Würfels. Werden neben den Zufallsgeräten andere Beispiele für Zufallsexperimente angeführt, so handelt es sich in jedem Fall um die Betrachtung einer statistischen Erhebung. Während bei den Beispielen zu den Zufallsgeräten der jeweilige Vorgang genannt wird (z. B. Werfen eines Würfels, Drehen eines Glücksrades), so geht es bei den Beispielen zu statistischen Erhebungen stets um das Ermitteln von Ergebnissen (z. B. Ermitteln der Ergebnisse einer Qualitätskontrolle, der Lebensdauer eines Gerätes, der Körpermaße von Menschen, der Anzahl zerfallener Teilchen oder der Anzahl von Telefonanrufen).

Mehrere Autoren weisen darauf hin, dass die beliebige Wiederholbarkeit unter gleichen Bedingungen in Wirklichkeit nicht realisierbar ist. In Büchter & Henn 2007 wird diese Eigenschaft sogar explizit nicht als notwendige Bedingung eines Zufallsexperimentes bezeichnet und als Beispiel für ein Zufallsexperiment auch ein konkretes Fußballspiel genannt.

In mehreren Büchern wird das Problem der Modellierung realer zufälliger Erscheinungen im Zusammenhang mit dem Begriff Zufallsexperiment diskutiert. Im Studienbrief zur Stochastik MS 2 (Schupp et al. 1979) heißt es: „Einen realen Vorgang als ein Zufallsexperiment anzusehen bedeutet, dass man die Wirklichkeit bereits idealisiert.“ (S. 10). Henze spricht in seiner Begriffserklärung von einem „idealen Zufallsexperiment“ (Henze 2008, S. 3). Die Autoren sehen ein Zufallsexperiment als ein so genanntes Realmodell an, das die tatsächlichen realen Verhältnisse vereinfacht, aber noch nicht auf der Ebene theoretischer Modelle angesiedelt ist.

Übereinstimmend wird von allen betreffenden Autoren festgestellt, dass der erste Schritt zur Modellierung realer Erscheinungen die Festlegung der Ergebnismenge des Zufallsexperimentes ist, das heißt das Zufallsexperiment selbst wird von allen als realer Vorgang beziehungsweise zumindest als Realmodell

gesehen. Dies wird in mehreren Büchern (z. B. Koops et al, 1981, Kütting & Sauer 2008) auch explizit zum Ausdruck gebracht. Aus den angegebenen Beispielen für Zufallsexperimente in allen Büchern ist zudem meist erkennbar, dass es sich um einen realen Vorgang handeln soll.

Engel (1992), der auf den Begriff Zufallsexperiment verzichtet, stellt vor einer schematischen Darstellung von Zufallsgeräten fest:

„Viele Erscheinungen der wirklichen Welt laufen so ab, als ob sie von Zufallsgeräten gesteuert würden.“ (S. 11)

Es ist zu vermuten, dass Fachwissenschaftler, die es ohnehin gewohnt sind in theoretischen Modellen zu denken, auch bei der Bezeichnung des Würfels als Zufallsexperiment nicht primär an den realen Vorgang, sondern zumindest an eine Idealisierung der Realität oder sogar an ein theoretisches Modell der Realität denken.

Zur Verwendung der Begriffe in Schulbüchern

Es erfolgte bei der Analyse eine Beschränkung auf Schullehrbücher für die Sekundarstufe II. Es wurden insgesamt 18 Lehrbücher analysiert und dabei alle großen Verlage beginnend in den 80iger Jahren berücksichtigt.⁴

In allen Schullehrbüchern werden die Wörter „Zufallsexperiment“ bzw. „Zufallsversuch“ verwendet, eines der Lehrbücher spricht von einem „stochastischen Vorgang“ und ein Lehrbuch von einem „Vorgang mit zufälligem Ergebnis“. Als Merkmale eines Zufallsexperimentes findet man analoge Eigenschaften wie in den Fachbüchern.

Es treten teilweise auch „Zirkeldefinitionen“ in den Begriffserklärungen auf, indem gesagt wird, dass Vorgänge, bei denen die Ergebnisse vom Zufall abhängen, als Zufallsexperimente bezeichnet werden.

Als Beispiele für Zufallsexperimente werden in allen Büchern vorrangig die Zufallsgeräte Würfel und Münze und in den meisten auch die Urne, das Ziehen von Karten und das Glücksrad angegeben; in 13 Büchern daneben auch andere Beispiele wie Befragungen, Messungen physikalischer Größen sowie Untersuchungen zur Lebensdauer und Qualität von Produkten.

3 Analyse der verwendeten Begriffe und Betrachtungen in der Literatur

Eine wissenschaftliche Theorie ist immer an Subjekte gebunden, die sie als komplexes System von Gedan-

ken im Kopf haben. Die Darstellung einer Theorie in einem Lehrbuch, dessen Autor wissenschaftlicher Vertreter der betreffenden Disziplin ist, stellt eine Widerspiegelung seines Systems von Gedanken dar. Dabei steht hinter jedem noch so abstrakten Begriff beim Autor ein Prototyp des Begriffs und weitere Beispiele, die sein Denken und damit auch die schriftliche Darstellung seiner Gedanken beeinflussen, auch wenn es ihm nicht immer explizit bewusst ist.

Die Betrachtungen zu Zufallsexperimenten bzw. analogen Begriffsbildungen findet man immer in den ersten Abschnitten bzw. Kapiteln der Lehrbücher bzw. vor Behandlung des Themas Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Autoren bemühen sich dabei in mehr oder weniger ausführlicher Weise, ihre Gedanken zu zufälligen Erscheinungen in der Realität und deren Erfassung durch die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung darzulegen. Für den Lernenden sind diese Abschnitte durchaus von großer Bedeutung, da hier seine inhaltlichen Vorstellungen zur Art und Weise der Reflektion der Realität in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgebildet werden können. Diese Lehrbuchabschnitte enthalten oft auch Gedanken zu inhaltlichen Aspekten des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Zur Rolle und zu Problemen der Begriffe „Zufallsexperiment“ und „Zufallsversuch“

Aus der Analyse der Fachliteratur ist ersichtlich, dass der Begriff „Zufallsexperiment“ bzw. analoge Begriffsbildungen kein Bestandteil des axiomatischen Aufbaus der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind. Sie dienen lediglich zur Interpretation des Verhältnisses der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Realität.

Die Begriffserklärungen in der Literatur können nicht als Definitionen im mathematischen Sinne aufgefasst werden, weil die darin enthaltenen Begriffe wie Bedingungen, Vorhersagbarkeit, Wiederholbarkeit oder Experiment nicht im mathematischen Sinne definierbar sind. Nur in sehr wenigen Lehrbüchern wird allerdings auf diesen Umstand hingewiesen. So äußern etwa Kütting & Sauer (2008, S. 30), dass der Begriff Zufallsexperiment ein vorgeschalteter Begriff ist, der sich einer exakten Beschreibung entzieht, aber unter didaktischen Gesichtspunkten hilfreich sei.

In einigen Fachbüchern und in vielen Schulbüchern werden im Zusammenhang mit dem Begriff Zufallsexperiment vergleichende Betrachtungen zu naturwissenschaftlichen Experimenten angestellt. Der Begriff Experiment hat in den Naturwissenschaften

einen klar umrissenen Inhalt. Experimente werden von Individuen geplant, durchgeführt und ausgewertet. Experimente dienen zur Überprüfung von wissenschaftlichen Hypothesen. Diese Eigenschaften haben Erscheinungen, die mit dem Begriff Zufallsexperiment bezeichnet werden, in der Regel nicht. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden Vorgänge betrachtet, die man nicht als Experimente bezeichnen kann.

Umgangssprachlich hat das Wort Experiment auch die Bedeutung „Wagnis; gewagtes Unternehmen“, die mit zufälligen Erscheinungen ebenfalls wenig Gemeinsamkeiten hat.

Umgekehrt können natürlich zufällige Vorgänge auch experimentell untersucht werden. Dann sollte man aber nicht von einem Zufallsexperiment, sondern von einem Experiment zu einem zufälligen Vorgang, etwa dem Werfen eines Würfels, sprechen. Es sollten dabei auch Grundprinzipien der experimentellen Methode eingehalten werden, nämlich vor dem Experiment begründete Hypothesen über den Versuchsausgang anzustellen und das Experiment entsprechend zielgerichtet zu planen.

Wird das Wort „Zufallsexperiment“ in dem in den Lehrbüchern erklärten Sinne verwendet, müssen sich die Schüler eine neue Bedeutung des Wortes Experiment aneignen. Weiterhin wird der Gegenstandsbereich der betrachteten zufälligen Erscheinungen erheblich eingeschränkt.

Das Wort „Versuch“ hat mehrere Bedeutungen. Eine Bedeutung entspricht der des Wortes „Experiment“ im wissenschaftlichen Sinne. Ein Versuch kann aber auch nur die einmalige Durchführung eines Vorgangs bedeuten (ein Versuch im Weitsprung). Feuerpfeil et al. 1989 schreiben sogar: „Die einmalige Durchführung eines Experimentes nennen wir Versuch.“ (S. 9)

Auf jeden Fall ist ein Versuch immer an eine den Versuch ausführende Person gebunden. Aus diesem Grund ist auch der Begriff „Zufallsversuch“ wenig geeignet, alle zufälligen Erscheinungen, die in der Stochastik erfasst werden sollen, zu beschreiben.

Die Analyse aller Schullehrbücher ergab wie bei den Fachbüchern eine enge Verknüpfung der Gedanken der Autoren zum Wort „Zufallsexperiment“ mit Betrachtungen zu Zufallsgeräten. Keiner der Autoren nahm aber eine klare Trennung zwischen einem realen Vorgang und einem ideellen Modell für diesen Vorgang vor. Dazu soll im Folgenden ein Vorschlag unterbreitet werden.

4 Ein Vorschlag zur Definition von mathematischen Modellen für zufällige Erscheinungen

Hinter der Präferenz von Würfel, Münze, Urne und Glücksrad in der Literatur steht die Tatsache, dass sich viele reale Vorgänge mit diesen Zufallsgeräten modellieren lassen und damit Eigenschaften der Vorgänge in vereinfachter Form untersucht oder auch durch Simulationen ermittelt werden können.

Dieser Gedanke kann konsequent zu Ende geführt werden, indem man mathematische Modelle für reale zufallsabhängige Vorgänge definiert. Als Bezeichnung für diese Modelle könnten durchaus die Worte „Zufallsexperiment“ oder „Zufallsversuch“ verwendet werden, wenn deutlich gemacht wird, dass es sich nicht um ein reales Experiment oder einen realen Versuch, sondern um einen Begriff auf der Modellebene handelt. Ich schlage vor, vorrangig von „Zufallsversuchen“ zu sprechen, da das Wort „Experiment“ eng mit seiner Bedeutung im naturwissenschaftlichen Sinne verbunden ist.

Als weiterer Begriff auf der Modellebene kann der Begriff „Zufallsgerät“ definiert werden, der mathematische Objekte bzw. Anordnungen von Objekten bezeichnet. Ein Zufallsversuch in diesem Sinne wäre durch die Angabe des Zufallsgerätes, durch eine Ergebnismenge sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert.

Beispiele für die Definition von Zufallsversuchen

a) Würfeln

Zufallsgerät: Würfel (im mathematischen Sinne), bei dem jeder der sechs Seiten genau einer der Zahlen 1 bis 6 zugeordnet ist

Ergebnismenge: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Wahrscheinlichkeitsverteilung: $P(k) = \frac{1}{6} \quad k \in E$

b) Münzwurf

Zufallsgerät: Zylinder mit Grundkreisradius r und Höhe h , wobei $h \ll r$. Der Grundfläche ist der Buchstabe W und der Deckfläche der Buchstabe Z zugeordnet.

Ergebnismenge: $E = \{W, Z\}$

Wahrscheinlichkeitsverteilung: $P(W) = P(Z) = \frac{1}{2}$

c) Glücksrad

Zufallsgerät: Kreis mit n Sektoren und den Zentrivinkeln α_k , $k = 1, 2, \dots, n$, denen die Zahlen 1 bis n zugeordnet sind

Ergebnismenge: $E = \{1, 2, \dots, n\}$

Wahrscheinlichkeitsverteilung: $P(k) = \frac{\alpha_k}{2\pi} \quad k \in E$

Der epistemologische Status dieser „Zufallsversuche“ entspräche etwa dem der mathematischen Körperbegriffe, die Abstraktionen der Form realer Objekte sind. So ist ein Würfel in der Mathematik ein ideelles Objekt, mit dem die Form realer Objekte, z. B. eines Spielwürfels, modelliert werden kann. Zu den Körpern gibt es so genannte Körpermodelle (als Unterrichts- und Anschauungsmittel), die zwischen realen Objekten und Körpern im mathematischen Sinne vermitteln sollen.

Analog wären die oben definierten Zufallsversuche ideale Objekte, die ebenfalls durch entsprechende Modellobjekte bzw. Modellversuche (z. B. Würfeln unter regulären Bedingungen) veranschaulicht werden könnten, die zwischen realen Vorgängen, z. B. dem Würfeln in allen seinen realen Formen und seinem ideellen Modell als Zufallsversuch vermitteln.

Im Unterschied zu den mathematischen Körpern, die wie die Zufallsgeräte starre Erscheinungen modellieren, ist ein Zufallsversuch ein Modell für einen Vorgang.

Diese Betrachtungsweise hätte mehrere Vorteile gegenüber der bisher üblichen oben dargestellten Darstellungsweise in der Literatur.

- Es entfielen die Betrachtung zur beliebigen Wiederholbarkeit unter gleichen Bedingungen, da die mathematischen (ideellen) Zufallsversuche a priori beliebig oft wiederholbar sind.
- Auch Betrachtungen zur Nichtvorhersagbarkeit bzw. Ungewissheit sind nicht erforderlich (vgl. nächsten Abschnitt).
- Es ist weiterhin eine klare Trennung zwischen dem realen Vorgang und seinem mathematischen Modell möglich. Man kann z. B. untersuchen, unter welchen Bedingungen das reale Würfeln mit dem Modell „Würfeln“ als Zufallsversuch beschrieben werden kann.
- Es ist ebenso möglich, eine klare Abgrenzung zum Begriff „Versuch“ bzw. „Experiment“ im naturwissenschaftlichen Sinne herzustellen.
- Es entfielen ebenfalls die Notwendigkeit einer Bezeichnung von Würfeln als Laplace-Würfel, da die damit gemeinte Eigenschaft mit dem Zufallsversuch „Würfeln“ sofort gegeben ist.

Ein weiterer Vorzug ist die mögliche Überwindung des Eindrucks der Wahrscheinlichkeitsrechnung als „Würfelbudenmathematik“, der entsteht, wenn insbesondere zu Beginn häufig Aufgaben zu Zufallsgeräten gestellt werden. Die Aufgaben hätten dann nicht mehr den Charakter realer Glücksspielprobleme, sondern

sie würden dem formalen Üben des Umgangs mit Modellen dienen, wie es in der Mathematik oft üblich ist. So müssen auch die Funktionen eine gewisse Zeit im Unterricht als formale Objekte behandelt werden, um sich mit ihrem formalen Umgang vertraut zu machen, bevor mit Funktionen reale Zusammenhänge beschrieben und untersucht werden können.

Eine Folge dieser Vorschläge wäre es natürlich, die Aufgaben in den entsprechenden Lehrbuchteilen umzuformulieren. Eine entsprechende Aufgabenstellung könnte lauten:

Untersuche, unter welchen Bedingungen die Produktion von Taschenrechnern näherungsweise durch einen Zufallsversuch beschrieben werden kann, wenn als Merkmal die Funktionsweise des Rechners mit den Ausprägungen „Der Rechner ist in Ordnung“, „Der Rechner ist nicht in Ordnung“ betrachtet wird. Gib einen möglichen Zufallsversuch an.

Zum Problem der Nichtvorhersehbarkeit

In der gesichteten Literatur wird gelegentlich das Problem der Nichtvorhersehbarkeit bzw. der Ungewissheit über den Ausgang eines Zufallsexperimentes genauer betrachtet. Daraus lassen sich Auffassungen der Autoren zum Begriff Zufall erkennen.

So stellt Maibaum in dem einzigen Schullehrbuch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in der DDR fest, dass ein zufälliger Versuch nicht zufällig sei:

„Der zufällige Versuch ist also nicht in irgendeiner Weise zufällig; es gibt aber zufällige Einflüsse, die bei der Beschreibung des Versuchs, das heißt bei der Aufzählung der den Versuch kennzeichnenden äußeren Bedingungen, nicht berücksichtigt sind und dazu führen, dass das Ergebnis dieses Versuchs im Rahmen verschiedener Möglichkeiten ungewiss ist.“ (Maibaum 1971, S. 17)

Die gleiche Argumentation ist auch in einem Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung für Ingenieure zu finden (Beyer, Erfurth 1999, S. 15), indem weiter ausgeführt wird, dass verschiedene Ergebnisse auftreten, da nicht alle Bedingungen bekannt sind. Der Zufall ist in dieser Interpretation nur Ausdruck von Unwissenheit und existiert nicht an sich.

Aber auch Diepgen et al. schreiben in einem Schullehrbuch zur Stochastik, dass man mit großem Aufwand auch das Ergebnis des Werfens eines Würfels vorhersagen könnte, wenn man alle Parameter des Wurfes erfassen und verarbeiten könnte.

„Stochastisch‘ ist also ein Vorgang für uns zunächst nicht aufgrund seiner ‚Natur‘, sondern nur aufgrund unserer Unwissenheit in der konkreten Situation.“ (Diepgen et al. 1993, S. 10)

Diese Sichtweise, die oft als strenger Determinismus bezeichnet wird, kann unter verschiedenen Aspekten diskutiert werden. Zunächst drückt sich darin die Überzeugung aus, dass es für alle beobachteten Wirkungen und Zustände auch objektive, vom Menschen oder von einem höheren Wesen unabhängige Ursachen gibt.

Man muss für eine solche Argumentation noch nicht einmal das hoch komplexe Bedingungsgefüge des Würfels betrachten. Bereits bei dem oft als Standardbeispiel für Zufall genannten zufälligen Treffen eines Bekannten in der Stadt kann eine dritte Person, die die sich Treffenden und deren Absichten genau kennt, eine sichere Vorhersage für das Treffen machen.

Trotz dieser möglichen Vorhersehbarkeit von Ergebnissen eines Vorgangs bleibt sein zufälliger Charakter davon unberührt. Auch wenn man jedes Ergebnis eines Münzwurfes vorhersagen könnte, ändert dies nichts an der Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit für eines der beiden möglichen Ergebnisse 0,5 (bzw. etwa 0,5) ist. Der Vorgang „Spaziergang durch die Stadt“ bleibt bezüglich des Merkmals „Treffen des Bekannten X“ ein Vorgang mit mehreren möglichen Ergebnissen, da man nicht bei jedem Spaziergang den betreffenden Bekannten trifft.

Die Nichtvorhersehbarkeit kann also kein definierendes Merkmal eines Vorgangs mit Zufallscharakter sein. Betrachtungen dazu bringen wenig Nutzen für die mathematische Modellierung zufälliger Vorgänge und verleihen zudem der betrachteten zufälligen Erscheinung einen subjektiven Charakter. Die Existenz mehrerer Ergebnismöglichkeiten bei Vorgängen wie das Wachstum einer Pflanze oder bei Vorgängen im Kosmos ist unabhängig vom Menschen und seiner Erkenntnistätigkeit.

5 Ein neues Modell zur Analyse zufälliger Erscheinungen

Die Vorschläge zur Verwendung des Begriffes Zufallsversuch als mathematisches Modell hinterlassen allerdings eine wesentliche Lücke. Das Problem der Analyse realer Vorgänge, die Betrachtung von Bedingungen, unter denen sie ablaufen, die Beschreibung ihres zufälligen Charakters und andere Fragen des Verhältnisses von Mathematik und Realität sind damit nicht gelöst, man hat sich ihrer lediglich entledigt. Das mag für eine fachwissenschaftliche Darstellung der Theorie vielleicht vertretbar sein, in der Schule sollte man dieses zentrale Problem des inhaltlichen Verständnisses von Stochastik nicht umgehen.

Im Folgenden soll ein Vorschlag zur Bewältigung dieser Problematik unterbreitet werden, den wir als „Prozessbetrachtung zufälliger Erscheinungen“ bezeichnen.

Zur Prozessbetrachtung zufälliger Erscheinungen und zum Begriff „zufälliger Vorgang“

Mit dem Terminus „zufällige Erscheinung“ sollen alle realen Dinge, Prozesse und Betrachtungen bezeichnet werden, die in der Natur, der Gesellschaft und dem Denken in irgendeiner Weise mit dem Phänomen „Zufall“ bzw. des „Zufälligen“ verbunden sind. Eine zufällige Erscheinung ist also sowohl das Werfen eines Würfels als auch die dabei erzielte Augenzahl, der Verlauf eines Fußballspiels wie auch das Ergebnis des Spiels.

Unter „Prozessbetrachtung“ wird verstanden, dass nicht ausschließlich die eingetretenen oder möglicherweise eintretenden Ergebnisse betrachtet werden, sondern der Prozess untersucht wird, in dessen Resultat die Ergebnisse eintreten können. Als zufällig wird deshalb aus dieser Sicht nicht ein eingetretenes oder ein mögliches Ergebnis bezeichnet, sondern der betreffende Vorgang, der zu diesem Ergebnis führt.

Wird dagegen ein Ergebnis als zufällig bezeichnet, so sind damit im Sinne der Umgangssprache verschiedene Bedeutungen verbunden, die für die Modellierung dieser Erscheinungen mit Mitteln der Stochastik hinderlich sind. So kann damit u. a. gemeint sein, dass das Ergebnis sehr selten eintritt, völlig unerwartet kommt oder dass man es nicht beeinflussen kann (Sill 1993).

Als einziges Kriterium für die Zufälligkeit eines Vorgangs ist die Existenz unterschiedlicher Ergebnismöglichkeiten bezüglich des betrachteten Merkmals anzusehen.

Anstelle des Wortes „Prozess“ verwenden wir im Unterricht die Bezeichnung „Vorgang“, da dieses Wort in der Umgangssprache häufiger vorkommt und insbesondere für jüngere Schüler leichter zugänglich ist.

Um den Zufallscharakter eines Vorgangs zum Ausdruck zu bringen, sind u. a. folgende Wortverbindungen möglich, die auch alle in der Literatur auftreten:

- (1) Vorgang mit Zufallscharakter
- (2) zufälliger Vorgang
- (3) Vorgang mit zufälligem Ergebnis bzw. Vorgang mit zufälligem Ausgang
- (4) zufallsabhängiger Vorgang

(5) zufallsbedingter Vorgang

(6) stochastischer Vorgang

Wir haben uns für den Schulunterricht für die Formulierung „zufälliger Vorgang“ aus folgenden Gründen entschieden:

- Es sollte eine möglichst kurze und einfache Formulierung verwendet werden.
- Es sollte mit der betreffenden Formulierung der neue Aspekt des Zufallsbegriffes, nämlich Eigenschaft eines Vorgangs zu sein, deutlich zum Ausdruck gebracht und damit von der dominierenden Verwendung zur Bezeichnung eingetretener Ergebnisse abgegrenzt werden.

Die Möglichkeiten (4) und (5) würden diese beiden Forderungen auch erfüllen, sie sind aber sprachlich etwas umständlicher und beziehen sich implizit auf den Objektbegriff Zufall.

Ein Nachteil der ebenfalls möglichen Formulierung (6) ist, dass die schwierige Sprech- und Schreibweise einer notwendigen Einführung in der Grundschule entgegensteht.

Eichler & Vogel (2009) unterstützen in ihrer aktuellen Publikation zur Leitidee „Daten und Zufall“ unsere Auffassung, den Zufall als Eigenschaft eines Vorgangs zu betrachten, und schlagen ebenfalls die Bezeichnung „zufälliger Vorgang“ anstelle von „Zufallsexperiment“ vor. Sie geben als einziges Merkmal eines zufälligen Vorgangs auch die Existenz mehrerer möglicher Ergebnisse an. Ihre Ausführungen und Unterrichtsvorschläge verdeutlichen aber auch, dass die Diskussion um die Bezeichnung nur ein erster Schritt zu einer Prozessbetrachtung ist.

Zur Notwendigkeit der Betrachtung eines Merkmals eines zufälligen Vorgangs

Die Zufälligkeit eines Vorganges kann nur bezüglich eines Merkmals untersucht werden. Althoff (1985) verwendet dazu in seinem Lehrbuch der Stochastik als Einstiegsbeispiel den für einen Mathematiklehrer nahe liegenden Vorgang „ein Stück Kreide fallen lassen“. Betrachtet man als Merkmal die Bewegungsrichtung des Kreidestücks, so ist der Vorgang nicht zufällig, da die Kreide mit Sicherheit nach unten fällt. Betrachtet man aber was passiert, wenn die Kreide auf den Boden fällt, gibt es sehr viele Möglichkeiten für das Ergebnis. Der Vorgang ist also bezüglich dieses Merkmals ein zufälliger Vorgang.

Mit dem Begriff Merkmal wird ein Grundbegriff der Statistik in das Modell für zufällige Erscheinungen integriert. Er hat inhaltliche Beziehungen zu dem

später eingeführten Begriff der Zufallsgröße aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ein Merkmal ist eine Eigenschaft der betrachteten Objekte. Jedes Merkmal besitzt bestimmte Merkmalsausprägungen, die mit verschiedenen Skalen gemessen werden können. Auch bei Zufallsgeräten werden Merkmale und ihre Ausprägungen betrachtet. Jede Zufallsgröße kann inhaltlich als quantitatives Maß von Merkmalsausprägungen aufgefasst werden. Merkmalsausprägungen entsprechen Zufallsgrößen, wenn sie mit einer Intervallskala messbar sind.

Man könnte einwenden, dass der Begriff „zufälliger Vorgang“ einen subjektiven Charakter erhält, wenn er an die Betrachtung von Merkmalen gebunden wird. Dies ist aber nicht der Fall, da die Merkmale eines Vorgangs auch ohne ihre Betrachtung existieren. Das Vorhandensein mehrerer Ergebnismöglichkeiten kann durchaus Einfluss auf weitere Prozesse haben; so beeinflussen etwa unterschiedliche Ausprägungen von Wachstumsparametern eines Hirsches seine Fortpflanzungsmöglichkeiten.

Zu den Bedingungen eines Vorgangs

Ein wesentlicher Aspekt einer Prozessbetrachtung ist die Untersuchung der *Bedingungen*, unter denen der Vorgang abläuft, sowie ihr Einfluss auf die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse.

Es sollte dabei beachtet werden, dass der Begriff „Bedingungen“ in zwei unterschiedlichen Bedeutungen verwendet wird. Es ist zwischen den *allgemeinen* Bedingungen eines Vorganges (z. B. Witterungsbedingungen beim Weitsprung) als den möglichen Einflussfaktoren und der *konkreten Ausprägung* dieser Bedingungen bei Ablauf des Vorganges (z. B. Windverhältnisse beim Anlauf) zu unterscheiden. Diese konkreten Ausprägungen sind die Ursachen für das eingetretene Ergebnis.

Mit der Einbeziehung von Bedingungen in die Prozessbetrachtung entstehen enge Bezüge zu den Betrachtungen von Gesetzen in den Naturwissenschaften, die auch stets nur unter bestimmten Bedingungen gelten. Anstelle von Bedingungen kann man auch von Faktoren, die auf den Vorgang Einfluss haben, sprechen.

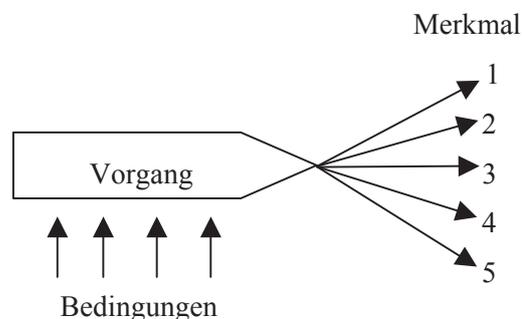
Zur Durchführung einer Prozessbetrachtung und ihrer schematischen Darstellung

Zur Untersuchung von zufälligen Erscheinungen im Unterricht sollten die Schüler an folgende Fragestellungen gewöhnt werden:

1. Welcher Vorgang läuft ab?
2. Welches Merkmal interessiert mich?

3. Welche Ergebnisse können bei Betrachtung dieses Merkmals eintreten?
4. Welche Bedingungen beeinflussen den Vorgang?

Zur Erfassung der Ergebnisse der Überlegungen hat sich im Unterricht folgendes grafische Schema bewährt:



Dieses Schema sollte zu Beginn der Behandlung der Stochastik eingeführt werden. Es lässt sich dann im weiteren Unterricht ausbauen, indem z. B. neben die Merkmalsausprägungen, also den möglichen Ergebnissen des Vorgangs, die Wahrscheinlichkeiten oder Werte von Zufallsgrößen eingetragen werden.

Zur Wiederholbarkeit eines zufälligen Vorgangs unter gleichen Bedingungen

Es sollte zunächst immer nur ein einzelner Vorgang betrachtet werden. Ob dieser Vorgang wiederholt abläuft, ob mehrere Vorgänge parallel verlaufen oder ob Vorgänge überhaupt zusammengefasst werden können, sollte als ein extra zu untersuchendes Problem angesehen werden.

Die Wiederholbarkeit eines Vorgangs unter gleichen Bedingungen ist also keine definierende Eigenschaft eines zufälligen Vorgangs. Damit werden auch Vorgänge wie der Ablauf eines Fußballspiels oder die Gedanken eines Arztes bei der Diagnose einer Krankheit in den Bereich der modellierten Situationen einbezogen.

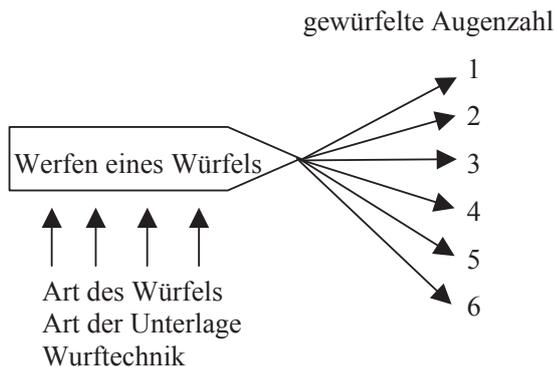
Die Untersuchung und der Vergleich der Ausprägungen der allgemeinen Bedingungen bei einer Vielzahl parallel laufender Vorgänge wie etwa dem Wachstum von Getreidepflanzen oder der Entwicklung von Freizeitgewohnheiten von Schülern führen zum Problem der Gruppierung von Vorgängen, also allgemein zur Betrachtung von Element-System-Beziehungen.

6 Anwendung der Prozessbetrachtung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Mithilfe des Schemas können alle Vorgänge, die im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftreten,

einheitlich modelliert werden. Für das Würfeln mit einem normalen Spielwürfel und dem interessierenden Merkmal „gewürfelte Augenzahl“ könnte die unten angegebene Darstellung entstehen. Dabei ist die doppelte Bedeutung des Merkmals „Augenzahl“ zu beachten. Die Augenzahl ist einmal wie seine Farbe ein Merkmal des Würfels und gehört damit zu den Bedingungen des Vorgangs und zum anderen als „gewürfelte Augenzahl“ ein Merkmal des Vorgangs „Würfeln“.

Im Unterschied zu dem im Punkt 4 definierten Zufallsversuch „Würfeln“ handelt es sich hier um den realen Vorgang des Werfens eines Würfels.



Damit wird zunächst nur die zufällige Erscheinung modelliert, ohne bereits ein Wahrscheinlichkeitsmaß anzugeben. Dies ist ein weiterer Modellierungsschritt, der erst erfolgen kann, wenn die Ausprägungen der Bedingungen bekannt sind bzw. modellhaft festgesetzt werden.

Bei den häufig auftretenden Aufgaben zur Qualität von Bauteilen wäre der zufällige Vorgang der Produktionsprozess des betreffenden Bauteils, das interessierende Merkmal die Qualität des Bauteils mit den Ausprägungen „in Ordnung“ und „fehlerhaft“ und Bedingungen des Vorgangs wäre u. a. die Qualität der verwendeten Materialien, der eingesetzten Maschinen sowie der Arbeiter.

Bei den typischen Aufgaben zur Diagnose von Krankheiten im Rahmen der Behandlung bedingter Wahrscheinlichkeiten wäre der zufällige Vorgang die Überlegungen des Arztes, das Merkmal das Vorliegen einer bestimmten Krankheit (ja oder nein) und zu den Bedingungen gehören die Kenntnisse des Arztes, die Informationen des Patienten und die Ergebnisse von Untersuchungen.

7 Anwendung der Prozessbetrachtung auf die Auswertung statistischer Daten

Oft wird Daten jeglicher zufälliger Charakter abgesprochen. So schreiben Diepgen et al. 1993:

„Statistik im Sinne dieser Deskriptivstatistik hat zunächst nichts mit stochastischen Situationen, also mit Ungewissheit und fehlendem Wissen zu tun.“ (S. 11)

Die Auswertung statistischer Daten hätte in diesem Sinne lediglich das Ziel, eine geeignete Zusammenfassung und Darstellung der Daten vorzunehmen und bestimmte Muster in den Daten zu erkennen.

In allen untersuchten Lehrbüchern wird das Erheben von Daten als ein Zufallsexperiment angesehen. Typische Beispiele sind

- (1) die Untersuchung einer Anzahl erzeugter Produkte auf ihre Qualität
- (2) die Befragung von Personen (z. B. zu Freizeitinteressen)
- (3) die Erhebung von Personendaten (z. B. Körpergröße, Gewicht)

Dass man die Datenerfassung als Zufallsexperiment bezeichnet, ist zwar nahe liegend, da die Daten ja offensichtlich als direktes Ergebnis der Qualitätskontrolle oder einer Wahlbefragung entstehen. Es handelt sich aber nicht um ein Experiment im wissenschaftlichen Sinne. Jedes Experiment bezieht sich auf einen Vorgang, wie etwa das Fallenlassen einer Kugel, der Durchgang von Licht durch ein Prisma oder die Aufzucht von Pflanzen, in dessen Verlauf bestimmte Ergebnisse entstehen und bei denen die Art der Ergebnisse Aussagen zu Merkmalen des Vorgangs ermöglichen.

Der Prozess der Datenerfassung kann aus Sicht der wissenschaftlichen Forschungsmethoden als eine Beobachtung bezeichnet werden, die oft der erste und notwendige Schritt wissenschaftlicher Erkenntnis ist.

Dieser Prozess ist ohne Frage selbst auch ein zufälliger Vorgang, da der tatsächliche Zustand nie genau erfasst bzw. beobachtet werden kann und jede Messung von Größen mit Fehlern behaftet ist. Diese Tatsache wird auch als „Variabilität statistischer Daten“ beschrieben und u. a. mithilfe folgender eingängiger Kurzformeln dargestellt:

- Daten = Signal + Rauschen
- Daten = Muster + Variabilität

Diese Sichtweise, die ausdrückt, dass reale Daten immer von einem theoretischen Modell abweichen, ist durchaus geeignet, die Phänomene von Fehlern in wissenschaftlichen Experimenten und das Problem der Regression, das auf stochastische und analytische Fragen führt, zu beschreiben. Aber schon bei der Interpretation des einfachen Münzwurfes ist es

im Unterricht den Schülern kaum zu vermitteln, den Einfluss des Zufalls als Rauschen im Signal zu interpretieren.

Die Rolle des Zufalls in statistischen Daten sollte nicht auf die so verstandene Variabilität der Daten reduziert werden. Damit erfolgt eine Beschränkung der Betrachtungen zum Zufall auf einen zwar wichtigen, aber m. E. nicht den wesentlichen Aspekt. Für den Umgang mit Daten im Rahmen einer stochastischen Allgemeinbildung ist weniger die Streuung der Daten um ein Muster, als vielmehr das Muster selbst und sein Zusammenhang mit den Bedingungen des Vorgangs von Interesse.

Das entscheidende Merkmal des zufälligen Charakters eines Vorganges ist gerade die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die durch das Muster modelliert wird. Sie ergibt sich aus der Gesamtheit aller wirkenden Bedingungen und stellt letztlich die Gesetzmäßigkeit der zufälligen Erscheinung dar.

Wenn etwa 100 Kugeln durch ein Galton-Brett rollen, ergibt sich bei jeder Wiederholung eine andere Verteilung, die vom Modell der Binomialverteilung immer etwas abweicht. Bei dieser Betrachtung des „Rauschens“ geht es nicht um die Streuung, die der Verteilung zu Grunde liegt, sondern um die Streuung der Werte um das Muster, also um den theoretischen Wert der Zufallsgröße.

Für die oben angegebenen drei typischen Beispiele aus Lehrbüchern bedeutet dies, auch die Vorgänge zu untersuchen, in denen diese Daten entstanden sind, also:

- (1) den Herstellungsprozess der Produkte,
- (2) den Prozess der Entwicklung der Freizeitinteressen der Personen bzw.
- (3) die Prozesse der körperlichen Entwicklung der Personen.

Bei der Anwendung der Prozessbetrachtung auf die Durchführung bzw. Auswertung statistischer Untersuchungen sind folgende Unterschiede zu den Betrachtungen zu beachten, die im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchgeführt werden:

- In der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden oft Vorgänge betrachtet, die sich mit Zufallsgeräten modellieren lassen, also unter sehr ähnlichen Bedingungen wiederholbar sind. Die Wiederholung eines Vorganges kann nacheinander erfolgen (einen Würfel dreimal werfen) oder auch in gleichwertiger Weise durch parallelen Verlauf des gleichen Vorgangs (drei Würfel einmal wer-

fen). Bei statistischen Untersuchungen besteht die Wiederholung in der Regel im gleichzeitigen Verlauf der Vorgänge (z. B. Entwicklungsprozesse von Einstellungen und Gewohnheiten). Die Gleichheit der Bedingungen muss erst untersucht werden, bevor man Grundgesamtheiten von Vorgängen bilden kann. Genau gleiche Bedingungen bei allen Vorgängen gibt es praktisch nicht, sie können nur im wesentlichen gleich sein. Auch wenn „gleiche“ Vorgänge nacheinander ablaufen (z. B. mehrere Weitsprünge eines Schülers, Schulwegzeiten eines Schülers im Laufe eines Monats), sind die Ausprägungen der Bedingungen bei jedem Ablauf anders.

- Im Unterschied zu den zufälligen Vorgängen im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung laufen bei statistischen Untersuchungen die Vorgänge auch nach der Erfassung ihrer Ergebnisse weiter.

Die Konsequenzen, die sich aus einer Prozessbetrachtung für die Auswertung statistischer Daten ergeben, soll an einem Beispiel zur Entwicklung der Datenkompetenz von Schülern aus Eichler & Vogel 2009 näher diskutiert werden. Die Ausführungen verstehen sich als Ergänzung der dort unterbreiteten sehr gut geeigneten Unterrichtsvorschläge zur Auswertung gegebener Datensätze bzw. zur eigenen Erhebung von Daten.

In dem Beispiel geht es um eine Befragung von Mitschülern zur Häufigkeit von Kinobesuchen. Der zufällige Vorgang, der hier untersucht wird, ist die Entwicklung der Kinogewohnheiten eines Jugendlichen mit dem Merkmal „Häufigkeit der Besuche in einem Monat“. Einflussfaktoren bei diesem Vorgang sind u. a. das Kinoangebot in dem Ort und dem Monat, die finanziellen Möglichkeiten des Jugendlichen, seine Zugehörigkeit zu einer Gruppe und die Auffassungen und Normen in dieser Gruppe. Diese Faktoren können von Schülern in günstiger Weise in ihrem Umfeld untersucht und diskutiert werden.

Aus diesen Überlegungen ergeben sich u. a. Konsequenzen für die Auswahl einer Stichprobe, worauf die Autoren bei ihren Beispielen oft auch hinweisen. Weiterhin sollte aber auch diskutiert werden, welche weiteren Merkmale bei der Befragung erfasst werden sollen. Wenn dies auch aus bestimmten Gründen oft nicht möglich ist, sollten bei der Interpretation der Daten diese Einflussfaktoren zur Relativierung der Aussagen herangezogen werden.

Die Betrachtungen zeigen, dass bei statistischen Untersuchungen eine Prozessanalyse zu einer ver-

tieften Hinterfragung und auch Infragestellung der erhobenen Daten führt. Die gegenwärtige Datenflut in den Medien könnte mit dieser Methode auf eine sehr geringe Anzahl von wirklich aussagekräftigen statistischen Erhebungen reduziert werden. Es ergeben sich teilweise erhebliche Konsequenzen für die Bewertung aktueller Entwicklungen, die auf der Verwendung statistischer Daten beruhen, wie etwa der Umgang mit zentralen Leistungserhebungen.

Während eine Zusammenstellung aller Bedingungen und ihre Diskussion mit Schülern in den meisten Fällen möglich sind, sind die tatsächliche Erfassung aller Faktoren und die entsprechende Auswertung mit den geeigneten statistischen Verfahren in der Regel nicht machbar. Man kann mit den Mitteln der Schulmathematik höchstens zwei Variable und ihren Zusammenhang mit Vierfeldertafeln oder Streudiagrammen betrachten.

8 Unterrichtsvorschläge und Erfahrungen zur Prozessbetrachtung

Die Vorschläge zur Einführung und Festigung der Prozessbetrachtung stützen sich u. a. auf eine Arbeit von G. Wenau (1991) zur Erprobung von entsprechenden Unterrichtsmaterialien in 5 Klassen der Jahrgangsstufe 3.

Eine weitere Grundlage der Vorschläge sind Untersuchungen der Lehrerin Christiane Umlauf in ihrem eigenen Unterricht einer 9. Klasse eines Gymnasiums in Teterow im Schuljahr 1994/95.

Zur Einführung in die Prozessbetrachtung

In beiden Erprobungen hat es sich bewährt, als ein prototypisches Beispiel für einen zufälligen Vorgang den Weitsprung eines Schülers zu verwenden. Es handelt sich um einen Vorgang, den jeder Schüler aus seiner eigenen Erfahrung kennt und für den er leicht Bedingungen nennen kann, die Einfluss auf den Vorgang haben. Weiterhin kann die neue Bedeutung des Wortes „zufällig“ als Eigenschaft eines Vorganges von anderen Aspekten des Begriffs „Zufall“ abgegrenzt werden, die Schüler bei diesem Beispiel sofort im Blick haben. Dies zeigen z. B. Auszüge aus einem Transkript der Einführungsstunde zur Prozessbetrachtung in der genannten 9. Klasse.⁵

L: ... okay , ich möchte mal ganz einfach anfangen mit einem Ausflug in den Sportunterricht .. Weitsprung ..

S1: wie weit man springt, kommt drauf an, was für einen Anlauf man nimmt, ob man Rückenwind hat und eben auf die körperliche (.)

S2: auf die Kraft, die man hat, darum ist es Zufall

S3: wenn ein Außenstehender also sieht, dass zum Beispiel da 20 Mann springen, das ist natürlich super , er kann natürlich nicht genau wissen wie weit einer springt , ob er über 5 Meter kommt oder so , denn es ist zum Beispiel schon ein Zufall, dass einer über weiß ich über 5 Meter kommt oder so , aber wenn man selbst springt und wenn man selbst die Weite sagen soll, ist es natürlich kein Zufall , man kann es ja beeinflussen, wie weit man springt , man kann zwar nicht beeinflussen, dass man unendlich weit springt, aber in etwa kann man es ja beeinflussen (.)

Die Formulierungen des Schülers verdeutlichen noch einmal, dass die gleiche stochastische Situation je nach Sichtweise als zufällig oder als nicht zufällig angesehen werden kann, wenn bei den Überlegungen verschiedene Bedeutungen des Wortes „Zufall“ ins Spiel kommen.

Bei unseren Untersuchungen in der Primarstufe zeigte sich, wie wichtig die Auswahl geeigneter einführender Beispiele ist. Unser Einstieg mit einer Verkehrsbeobachtung, bei der die Farbe der Autos ermittelt wurde, erwies sich für Vorgangsbetrachtungen als wenig geeignet. Der Vorgang und seine Bedingungen, dessen Ergebnis die Farben der Autos sind, sind von Schülern und Lehrern schwer erfassbar.

Wenau 1991 stellt jedoch in Auswertung ihrer Fallstudien fest, dass „die Schüler im Alter von 8/9 Jahren mit Erfolg in diese Betrachtungsweise zufälliger Vorgänge eingeführt werden können“ (S. 114). Sie weist aber auch darauf hin, dass es notwendig ist, größere Unterrichtsabschnitte für die Behandlung stochastischer Problemstellungen zu nutzen, dass die Prozessbetrachtung zufälliger Erscheinungen auch auf andere Unterrichtsfächer ausgedehnt werden sollte und die Lehrer gründlich darauf vorbereitet werden sollten.

Möglichkeiten zur Festigung der Prozessbetrachtung

Um die Allgemeinheit der Kenntnisse zur Prozessbetrachtung zu sichern, sollten Beispiele aus möglichst vielen Bereichen gewählt werden. Dazu gehören:

- Produktionsprozesse,
- Verpackungsvorgänge,
- Vorgänge aus dem Alltag (z. B. Schlafen in der Nacht, Autoverkehr in einer Straße)
- biologische Prozesse (z. B. Wachstum von Pflanzen, Wirken von Medikamenten),

- Entwicklungsprozesse von Interessen und Einstellungen (z. B. Entwicklung von Freizeitinteressen oder Einstellungen zu Parteien),
- Erkenntnisprozesse (z. B. Überlegungen eines Arztes bei der Diagnose einer Krankheit)

Es gibt verschiedene Aufgabentypen zur Festigung der Prozessbetrachtung:

- (1) Angabe möglicher Ergebnisse und Bestimmung des zufälligen Charakters eines Vorgangs bei einem gegebenen Merkmal

Beispiel:

Vorgang: Körperwachstum

Merkmal: Körpergröße

Es können verschiedene Skalierungen betrachtet werden (qualitativ, quantitativ).

Der Vorgang ist zufällig, da es für einen beliebigen Menschen unterschiedliche Ergebnismöglichkeiten gibt.

- (2) Angabe eines betrachteten Merkmals bei vorgegebenem zufälligen Charakter eines Vorgangs

Beispiel:

Das Werfen eines Spielwürfels auf einer großen glatten Oberfläche soll bezüglich eines betrachteten Merkmals kein zufälliger Vorgang sein. Dazu können als Merkmal „Eine Augenzahl erscheint.“ oder „Der Würfel liegt auf eine Ecke.“ mit den Ausprägungen „Ja“ und „Nein“ betrachtet werden, bei denen es jeweils nur ein mögliches Ergebnis gibt.

- (3) Angabe von Bedingungen bei einem gegebenen Merkmal eines zufälligen Vorgangs

Beispiel:

Als Vorgang kann der Pulsschlag eines Schülers mit dem Merkmal „Anzahl der Schläge pro Minute“ betrachtet werden. Die Anzahl der Schläge wird u. a. von folgenden Bedingungen beeinflusst: Aufregung, vorherige Tätigkeit oder Gesundheitszustand.

- (4) Angabe eines Merkmals bzw. möglicher Merkmalsausprägungen bei statistischen Untersuchungen mit einer gegebenen Anzahl von Wiederholungen

Beispiel:

Bei allen Schülern einer Klasse wird der Prozess der Entwicklung ihres mathematischen Wissens und Könnens betrachtet.

Ein mögliches Merkmal wäre die Leistung der Schüler im Kopfrechnen.

- (5) Bestimmen des zufälligen Vorgangs bei einem gegebenen Merkmal einer statistischen Untersuchung

Beispiel:

Bei einer Untersuchung wird die Anzahl von Schokolinsen verschiedener Farben in 10 Tüten bestimmt. Der zufällige Vorgang, der zu den unterschiedlichen Anzahlen führt, ist die Verpackung der Schokolinsen.

Bei unseren Untersuchungen erwies sich der Aufgabentyp (5) als besonders schwierig. Bei dem folgenden von einem Schüler in einer der 3. Klassen genannten Beispiel war die Lehrerin überfordert, sofort den Vorgang zu erkennen. Der Schüler sagte: „Beim Beobachten eines Schornsteines kann man feststellen, Rauch kommt heraus oder Rauch kommt nicht heraus“ Hier handelt es sich um den Betrieb der jeweiligen Heizungsanlagen, mit dem Merkmal „Betriebszustand“; zu untersuchende Bedingungen wären u. a. die Umgebungstemperaturen oder die Nutzung der Wohnung.

Eine Möglichkeit zur Vertiefung der Prozessbetrachtung ist die Untersuchung von möglichen Veränderungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Veränderung der Bedingungen. Dazu ist die folgende Aufgabenstellung geeignet:

Von welchen parallel laufenden zufälligen Vorgängen werden bei den folgenden statistischen Untersuchungen die Ergebnisse ermittelt?

Gib einige Bedingungen an, die Einfluss auf die Vorgänge haben. Wie könnte die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse durch Änderung der Bedingungen verändert werden?

- a) Ermitteln der Anzahl der Familien mit 0; 1; 2; 3 oder mehr Kindern.
- b) Befragen der Schüler einer Stadt zur Anzahl der Kinobesuche in einem Monat.
- c) Ermitteln der Anzahl von Schülern einer Schule, die regelmäßig rauchen.

9 Abschließende Bemerkungen

Die grundlegenden Begriffe und Betrachtungsweisen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik stehen in der Fachliteratur und in Schullehrbüchern in der Regel oft unverbunden nebeneinander. Dies drückt sich bereits in den Überschriften der entsprechenden Themengebiete in Rahmenplänen aus.

Auch in den aktuellen Bildungsstandards findet man diese Trennung bereits in der Überschrift (Daten und Zufall), wobei zu bemerken ist, dass die Termini sehr

unglücklich gewählt sind. Der schillernde Begriff „Zufall“ ist kein Thema des Mathematikunterrichts und kann auch nicht als eine Leitidee in der Mathematik bezeichnet werden. Die vorgenommene Literaturanalyse zeigt erneut, dass die Auffassungen zum „Zufall“ selbst unter Stochastikexperten sehr unterschiedlich sind bis hin zu der Ansicht, dass es gar keinen Zufall gäbe. In wie weit mit dem Wort „Daten“ eine Idee bezeichnet wird, erschließt sich mir auch nur schwer.

Es macht wenig Sinn, über die „Richtigkeit“ des vorgeschlagenen Modells zur Analyse zufälliger Erscheinungen zu reflektieren. Wie bei jeder Theorie ist das entscheidende Kriterium für ihre Anwendung ihr Grad der Konstruktivität bei der Bearbeitung von konkreten Problemen in dem von der Theorie modellierten Sachgebiet. Bei der Erarbeitung des Stochastiklehrgangs in einer neuen Lehrbuchreihe für die Sekundarstufe I, dessen Herausgeber der Autor ist, hat sich die Prozessbetrachtung u. a. bei der Entwicklung von Konzepten zum Wahrscheinlichkeitsbegriff, zu mehrstufigen Vorgängen und zur bedingten Wahrscheinlichkeit als konstruktiv erwiesen.

Anmerkungen

- 1 Die Liste der untersuchten Lehrbücher und die Analysedaten können beim Autor angefordert werden.
- 2 Zur Vereinfachung wird im Folgenden nur der Begriff „Zufallsexperiment“ verwendet.
- 3 Als Zufallsgeräte sollen im Folgenden Würfel, Münze, Urne und Glücksrad bezeichnet werden.
- 4 Die Liste der Lehrbücher mit den Analyseergebnissen kann ebenfalls beim Autor angefordert werden.
- 5 Es wurden u. a. folgende Transkriptionsregeln verwendet: Auslassung: (); kurzes Absetzen, 1 sec.: , ; 2 sec. Pause: ...; 3 sec Pause: ...; Heben der Stimme: `

Literatur

- Althoff, Heinz (1985): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Stuttgart: J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung.
- Barth, Friedrich; Haller, Rudolf (1992): Stochastik: Leistungskurs. 3. Aufl. München: Ehrenwirth.
- Beyer, Otfried; Erfurth, Horst (1999): Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. 8., durchges. Aufl. Stuttgart: Teubner (Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler).
- Diepgen, Raphael; Kuypers, Wilhelm; Rüdiger, Karlheinz (1993): Stochastik. 1. Aufl. Berlin: Cornelsen (Mathematik).

Eichler, Andreas; Vogel, Markus (2009): Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

Engel, Arthur (1992): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. 1. Aufl., [Nachdr.]. Stuttgart: Klett (Klett-Studienbücher Mathematik).

Feuerpfeil, Jürgen; Heigl, Franz; Wiedling, Hartmut (1989): Praktische Stochastik. München: Bayer. Schulbuchverl.

Henze, Norbert (2008): Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls. Wiesbaden: Springer.

Maibaum, Gert (1971): Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1. Aufl. Berlin: Verl. Volk u. Wissen (Mathematische Schülerbücherei, ISSN 0076-5449).

Mathematik: Länderausgabe *Mecklenburg-Vorpommern* (2002–2008)/Hrsg.: H.-D. Sill – Berlin: DUDEN PAETEC Schulbuchverlag, Gymnasium, Klassen 5 bis 10, Arbeithefte und Lehrermaterialien, 2. überarb. Aufl, 2002–2008.

Kolmogoroff, Andrej Nikolaevič (1933): Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete : a series of modern surveys in mathematics, ISSN 0071-1136).

Koops, H.; Lehn, J.; Preiß, G.; Schröder, J.; Wenzelburger, E. (1981): Wahrscheinlichkeitsrechnung. HE 12. Tübingen: DIFF (Mathematik für Lehrer der Sekundarstufe I/Hauptschule).

Kütting, Herbert; Sauer, Martin J (2008): Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte. 2., stark erw. Aufl. Berlin: Spektrum Akad. Verl.

Schmid, August (2003): Lambacher-Schweizer: LS-Stochastik. Stuttgart: Klett.

Schupp, Peter; Schweizer, Udo; Wagenknecht, Niels (1979): Zugänge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Stochastik MS 2. Tübingen: DIFF (Mathematik Studienbriefe zur Fachdidaktik für Lehrer der Sekundarstufe II).

Sill, H.-D.(1993): Zum Zufallsbegriff in der stochastischen Allgemeinbildung. In: *Zentralbl. Didaktik Math.* (ZDM) 25(1993)2. S. 84–88.

Wenau, G. (1991): Zur Behandlung ausgewählter Aspekte des Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Grundschule. Dissertation. Güstrow: Pädagogische Hochschule, Philosophisch-pädagogische Fakultät.

Anschrift des Verfassers

Hans-Dieter Sill
Institut für Mathematik
Universität Rostock
Ulmenstr. 69
18057 Rostock
hans-dieter.sill@uni-rostock.de